



Übersichtsblatt: Integralrechnung

Zweck: Bestimmung von Flächeninhalten bei nicht geradlinig begrenzten Flächen.

Vorgehensweise:

1. Intervall bestimmen:
Dies können entweder vorgegebene Grenzen sein, oder aber Schnittpunkte zwischen zwei Funktionen bzw. mit der X-Achse. Es ist zu prüfen, ob sich im Intervall Nullstellen befinden. Liegt eine N im Intervall vor, so ist dieses zu Teilen.
2. Stammfunktion aufstellen:
Hierbei gilt: $f(x) = a \cdot x^n$
 $F(x) = \frac{a}{n+1} \cdot x^{n+1}$
3. Obere Intervallgrenze von Unterer Intervallgrenze abziehen.

Beispiel:

Welcher Flächeninhalt wird von der Funktion $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$ und der X-Achse eingeschlossen?

1. Intervall bestimmen:
→ Dies geschieht hier durch die Nullstellen, da diese das Intervall begrenzen.

$$0 = x^3 - 4x^2 + 3x \quad \rightarrow \quad \text{Horner- Schema:} \quad \begin{array}{r|rrr} & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ \hline & 1 & -3 & 0 \end{array}$$

$$0 = x^2 - 3x \quad \text{Raten: } x_0 = 1$$

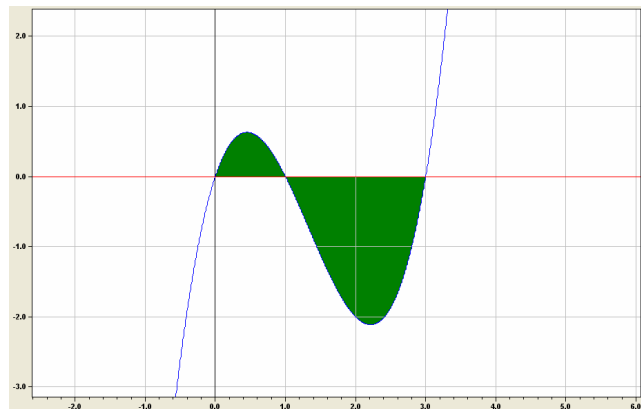
$$x_{2|3} = \frac{3}{2} \pm \frac{3}{2} \quad N_1(0|0); N_2(1|0); N_3(3|0)$$

2. Stammfunktion aufstellen:

$$\int_0^3 (x^3 - 4x^2 + 3x) dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \right]_0^3$$

Da das Intervall durch eine Nullstelle unterbrochen wird muss auch der Flächeninhalt geteilt werden.

$$\text{Es gilt: } A = |A_1| + |A_2|$$



3. Obere Intervallgrenze von Unterer Intervallgrenze abziehen

$$A = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \right]_0^1 + \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \right]_1^3$$

$$A = \left| \left(\frac{5}{12} \right) - (0) \right| + \left| \left(-\frac{2}{3} \right) - \left(\frac{5}{12} \right) \right|$$

$$A = \left| \frac{5}{12} \right| + \left| -\frac{2}{3} \right|$$

$$A = \left| \frac{3}{4} \right| \text{ FE}$$





Übersichtsblatt: Integral von gebrochenrationalen Funktionen

Zweck: Bestimmung von Flächeninhalten bei nicht geradlinig begrenzten Flächen.

Vorgehensweise:

1. Intervall bestimmen:
Dies können entweder vorgegebene Grenzen sein, oder aber Schnittpunkte zwischen zwei Funktionen bzw. mit der X-Achse. Es ist zu prüfen, ob sich im Intervall Null-, Polstellen oder unüberwindbare Lücken befinden. Liegt eines dieser Ereignisse im Intervall vor, so muss das Intervall geteilt werden.
2. Stammfunktion aufstellen:
Fall 1: $Z(x) > N(x) \rightarrow$ **Polynomdivision!!!**
Das Ergebnis der Polynomdivision ist i.d.R. eine ganzrationale Funktion.
Hierbei gilt: $f(x) = a \cdot x^n$
 $F(x) = \frac{a}{n+1} \cdot x^{n+1}$
Fall 2: $Z(x) = N'(x) \rightarrow$ **[lnN(x)]**
Merke: Es gibt keinen ln von negativen Werten, diese müssen beim logarithmieren daher grundsätzlich absolut genommen werden.
Fall 3: Wenn keiner der ersten beiden Fälle eintritt, so muss N(x) so umgeformt werden, dass Fall 2 angewendet werden kann.
3. Obere Intervallgrenze von Unterer Intervallgrenze abziehen.

Beispiel:

Welchen Flächeninhalt schließt die Funktion $f(x)$ im Intervall von 1 bis 2 mit der X-Achse ein?

$$f(x) = \frac{3}{2x-5} \Rightarrow \int_1^2 \left(\frac{3}{2x-5} \right) dx$$

1. Intervall bestimmen:
 $\rightarrow$ Das Intervall ist bereits gegeben es muss aber noch auf N,P und L überprüft werden.

$N(3|0)$; $x_P = 2,5$; es gibt keine Lücke

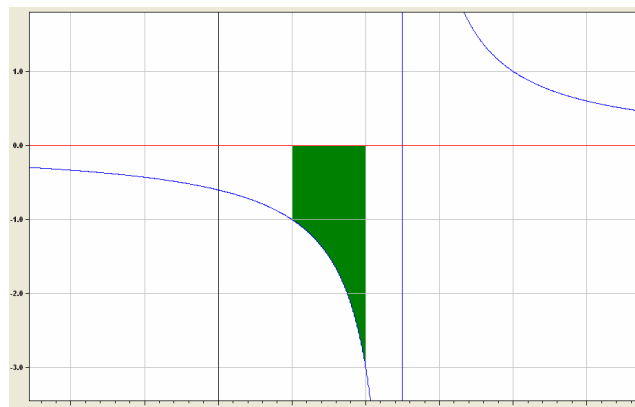
2. Stammfunktion aufstellen:

$$A = \int_1^2 \left(\frac{3}{2x-5} \right) dx$$

$$A = \frac{3}{2} \cdot \int_1^2 \left(\frac{\frac{2}{3} \cdot 3}{2x-5} \right) dx$$

$$A = \frac{3}{2} \cdot \int_1^2 \left(\frac{2}{2x-5} \right) dx$$

$$A = \frac{3}{2} \cdot [\ln(2x-5)]_1^2$$



3. Obere Intervallgrenze von Unterer Intervallgrenze abziehen

$$A = \frac{3}{2} \cdot \ln\left(\frac{|-1|}{|-3|}\right) = |-1,648|$$

