

ÜBERSICHTSBLATT: ABLEITUNGSREGELN

Potenzregel

In den allermeisten Fällen wird die Ableitung einer Funktion über die sogenannte Potenzregel gebildet.

$$f(x) = a \cdot x^n$$

$$f'(x) = n \cdot a \cdot x^{n-1}$$

Beispiel:

$$f(x) = 4x^2 \Rightarrow f'(x) = 2 \cdot 4 \cdot x^{2-1} = 8x$$

Elementare Ableitungsregeln

Die Nachfolgende Tabelle beschreibt die Vorschrift zur Bildung der ersten Ableitung für eine Reihe von häufig gebrauchten Funktionen, die sich leider nicht durch die Potenzregel behandeln lassen.

Funktion $f(x)$	Ableitung $f'(x)$	
Trigonometrische Funktionen	$\sin x$	$\cos x$
	$\cos x$	$-\sin x$
	$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
	$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x$
Arkusfunktion	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
	$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
	$\text{arccot } x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
Exponentialfunktionen	e^x	e^x
	a^x	$(\ln a) \cdot a^x$
Logarithmusfunktionen	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
	$\log_a x$	$\frac{1}{(\ln a) \cdot x}$
Hyperbelfunktionen	$\sinh x$	$\cosh x$
	$\cosh x$	$\sinh x$
	$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$
	$\coth x$	$-\frac{1}{\sinh^2 x} = 1 - \coth^2 x$
Areafunktionen	$\text{arsinh } x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
	$\text{arcosh } x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
	$\text{artanh } x$	$\frac{1}{1-x^2}$
	$\text{arcoth } x$	$\frac{1}{1-x^2}$

ÜBERSICHTSBLATT: ABLEITUNGSREGELN

Faktorregel

Ein konstanter Faktor C bleibt beim Differenzieren erhalten:

$$f(x) = C \cdot u(x)$$

$$f'(x) = C \cdot u'(x)$$

Beispiel:

$$f(x) = 4 \cdot \sin x \Rightarrow f'(x) = 4 \cdot \cos x$$

Summenregel

Eine endliche Summe von Funktionen darf gliedweise differenziert werden:

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)$$

$$f'(x) = f_1'(x) + f_2'(x) + \dots + f_n'(x)$$

Beispiel:

$$f(x) = 4x^3 + 2x^2 - 6x + 5 \Rightarrow f'(x) = 12x^2 + 4x - 6$$

Produktregel

Bei Faktorfunktionen gilt:

$$f(x) = u(x) \cdot v(x)$$

$$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

Beispiel:

$$f(x) = \sin x \cdot \ln x \Rightarrow f'(x) = \cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x}$$

Quotientenregel

Stehen in Zähler und Nenner einer gebrochen rationalen Funktion jeweils eine differenzierbare Funktion, so gilt:

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

$$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$$

Beispiel:

$$f(x) = \frac{4x}{3x^2 + 2} \Rightarrow f'(x) = \frac{4 \cdot (3x^2 + 2) - 4x \cdot 6x}{(3x^2 + 2)^2} = \frac{12x^2 + 2 - 24x^2}{(3x^2 + 2)^2} = \frac{-12x^2 + 2}{(3x^2 + 2)^2}$$

Kettenregel

Die Ableitung einer aus den beiden (elementaren) Funktionen $y = F(u)$ und $u = u(x)$ zusammengesetzten (verketteten) Funktionen $y = F(u(x)) = f(x)$ ist das Produkt aus der äußeren und der inneren Ableitung.

$$f(x) = F(u(x))$$

$$f'(x) = F'(u) \cdot u'(x)$$

Bezeichnungen:

$y = F(u):$	Äußere Funktion
$u = u(x):$	Innere Funktion
$F'(u):$	Äußere Ableitung
$u'(x):$	Innere Ableitung

Beispiel:

$$f(x) = \ln(1 + x^2) \Rightarrow \text{Substitution: } u(x) = 1 + x^2; \quad F(u) = \ln u$$

$$\text{Ableitungen von } u \text{ und } F \text{ bilden: } u(x)' = 2x; \quad F'(u) = \frac{1}{u}$$

Alles in die o. g. Regel einsetzen:

$$f'(x) = \frac{1}{u} \cdot 2x = \frac{2x}{u} = \frac{2x}{1+x^2}$$