Übersichtsblatt:
Lineare Abhängigkeit

Definition:

Eine Reihe von r Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_r$ aus R^n ist dann linear abhängig, wenn es für die Gleichung:

$$c_1 \cdot \vec{v}_1 + c_2 \cdot \vec{v}_2 + \ldots + c_r \cdot \vec{v}_r = 0$$

noch andere Lösungen gibt als die so genannte triviale Lösung:

$$c_1 = 0, c_2 = 0, \ldots, c_r = 0 .$$

Gibt es hingegen noch andere Lösungen als die triviale, so sind die Vektoren linear unabhängig.

Beispiel:

Gegeben sein die folgenden Vektoren, die auf ihre lineare Abhängigkeit hin überprüft werden sollen:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}; \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}; \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wir prüfen also auf die Gleichung:

$$c_1 \cdot \vec{v}_1 + c_2 \cdot \vec{v}_2 + c_3 \cdot \vec{v}_3 = 0$$

Hieraus ergibt sich ein homogenes lineares Gleichungssystem der Form $A \cdot \vec{c} = 0$:

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ -2 & 6 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Regel:

Dieses System hat genau dann die nicht triviale Lösung $\vec{c} \neq 0$, wenn det(A)=0 gilt.

Wir bestimmen zur Überprüfung auf lineare Abhängigkeit also die Determinante der Matrix. Ist diese 0, so sind die Spaltenvektoren der Matrix linear abhängig.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ -2 & 6 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 6 + 30 + 6 - 54 + 10 + 2 = 54 - 54 = 0$$

$\Rightarrow$ Da det(A)=0 existiert für dieses System offenbar eine nicht triviale Lösung $\vec{c} \neq 0$. Also sind die Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ und $\vec{v}_3$ linear abhängig.