Übersichtsblatt:
Komplexe Zahlen

Definition:

Die komplexen Zahlen sind definiert als $C := \{a + b \cdot j; a, b \in R\}$. Man nennt a den Realteil von z, Re(z) und b den Imaginärteil von z, Im(z), j ist die imaginäre Einheit.

Zwei Komplexe zahlen: z= a + bj und w= c + dj sind genau dann gleich, wenn gilt:

a = c und b = d.

Rechenregeln:

Addition:

Man kann komplexe Zahlen addieren indem man jeweils getrennt ihre Real- und Imaginärteile addiert.

z = a + bj und w = c + dj

z + w = (a + c) + (b + d)

Multiplikation:

Bei der Multiplikation zweier komplexer Zahler werden die Imaginär- und Realteile der Zahlen einfach miteinander ausmultipliziert. Man macht sich hierbei die Eigenschaft zu nutze, dass j^2 gleichbedeutend mit -1 ist.

$$z \cdot w = (a + bj) \cdot (c + dj) = ac - bd + (ad + bc) \cdot j$$

Betragsbildung:

Der Betrag einer komplexen Zahl ist definiert wie die Länge des entsprechenden Vektors, somit gilt lauf Pythagoras:

$$z = a + bj \Rightarrow |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Konjugierte komplexe Zahl:

Es sie z = a + bj, so ist die konjugierte komplexe Zahl $\bar{z}$ =a – bj.

Dies entspricht einer Spiegelung an der reellen Achse.

Invertierte komplexe Zahl:

Die invertierte komplexe Zahl z^{-1} oder $\frac{1}{z}$ berechnet sich nach folgender Formel:

$$\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} \cdot j$$

Folge: hat $z \neq 0$ die Länge $|z|$ und das Argument α, dann

hat $\frac{1}{z}$ die Länge $\frac{1}{|z|}$ und das Argument $(-\alpha)$

Polardarstellung komplexer zahlen:

Wenn $z \neq 0$ ist und $r = |z|$ und $\alpha = \arg(z)$ gilt, dann nennt man

$z = r \cdot e^{\alpha j}$ die Polardarstellung von z.

Hieraus ergibt sich:

Re(z) = a = $r \cdot \cos\alpha$

Im(z) = b = $r \cdot \sin\alpha$

$$\arg(z) = \alpha = \begin{cases} \arctan\left(\frac{b}{a}\right), \text{für}: a > 0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi, \text{für}: a < 0 \\ \frac{\pi}{2}, \text{für}: a = 0 \wedge b > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, \text{für}: a = 0 \wedge b < 0 \end{cases}$$