Übersichtsblatt:
Die Inverse eine quadratischen Matrix

Definition:

Sind A und B aus Mat(n x n, R) quadratische Matrizen mit AB = BA = E, so nennt man B die inverse Matrix zu A und schreibt B = A^{-1}. Falls eine solche Matrix existiert heißt A invertierbar.

Eine Matrix A Mat(n x n, R) ist invertierbar, wenn der Rang der Matrix gleich der Anzahl der der Spalten bzw. Zeilen ist. D.h. wenn die Matrix A in der oberen Dreiecksgestallt keine Zeilen hat, die komplett mit 0 befüllt sind. Als weiteres Kriterium für die Invertierbarkeit einer Matrix gilt die Bedingung:

$$\det(A) \neq 0$$

Invertierungsverfahren:

Man schreibt die Einheitsvektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2 ... \vec{e}_n$ nebeneinander, so dass sich eine Einheitsmatrix E ergibt. Die Einheitsmatrix schreibt man nun rechts von Matrix A und erhält so ein Matrix vom Typ Mat(n x 2n). Diese kombinierte Matrix transformiert man nun so lange (mit Hilfe von elementaren Umformungen) bis die linke Teilmatrix die Einheitsmatrix E darstellt. Das Resultat dieser Umformung ist, dass die rechte Seite der kombinierten Matrix nun die gesuchte zu inverse Matrix A^{-1} darstellt.

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \\ 7 & 3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{kombinierte Matrix } A \mid E = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Transformation durch elementare Umformungen:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[3.-(\frac{7}{2}\cdot 1)]{2.-(\frac{5}{2}\cdot 1.)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{5}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{7}{2} & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{3.-2.}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{5}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(-1)\cdot 2.} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{5}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{2.-3.}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{7}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{(-2)\cdot 2.} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 7 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{1.-2.}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & -6 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 7 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{2}\cdot 1.} \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}}_{E}\middle|\underbrace{\begin{array}{ccc} -3 & 0 & 1 \\ 7 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{array}}_{A^{-1}}\right)$$

Die zu A inverse Matrix heißt also:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 7 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$