Übersichtsblatt:
Eigenwerte und Eigenvektoren

Definition:

Ist λ eine reelle Zahl und $\vec{x} \neq \vec{0}$ ein Vektor in R^n mit

$$A \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x}$$

so sagen wir, dass λ ein Eigenwert von A ist und $\vec{x}$ ein zu λ gehörender Eigenvektor.

Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren:

Man bildet zunächst die so genannte charakteristische Gleichen von A:
Aus $A \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x}$ folgt die charakteristische Gleichung

$$(\lambda \cdot E_n - A) \cdot \vec{x} = 0$$

Damit λ ein Eigenwert von A ist muss diese Gleichung eine nicht triviale Lösung besitzen. Dies ist genau dann der Fall, wenn $\det(\lambda \cdot E_n - A) = 0$ gilt.

Zur Berechnung λ bildet man daher folgerichtig die Determinantengleichung zu $\lambda \cdot E_n - A$ und setzt diese = 0. Dieses System löst man dann nach λ auf und erhält somit die Eigenwerte von A.

Um nun die zu λ gehörenden Eigenvektoren $\vec{x}_n$ zu erhalten, setzt man die für λ errechneten Werte in das Uhrsprungssystem ein und löst dieses nach x_n auf.

Beispiel:

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$. Gesucht sind die Eigenwerte der Matrix A und deren Eigenvektoren. Unseren Berechnungen liegt damit das folgende lineare Gleichungssystem zu Grunde:

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ dies kann man auch schreiben als:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \lambda x_1 \\ -2x_1 + 4x_2 &= \lambda x_2 \end{aligned} \quad \text{oder} \quad \begin{aligned} (\lambda-1)x_1 - x_2 &= 0 \\ 2x_1 + (\lambda-4)x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Diese letzte Darstellung entspricht nun $(\lambda \cdot E_n - A) \cdot \vec{x} = 0$ und zur Berechnung der Eigenwerte müssen wir nun die Determinantengleichung aufstellen.

$$\det\begin{pmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ 2 & \lambda - 4 \end{pmatrix} = 0 = \lambda^2 - 5\lambda + 6$$

Eine Gleichung dieser form können wir nun nach der Methode der p-q-Formel nach λ auflösen und erhalten die werte $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 3$.

Um nun die Eigenvektoren zu den Eigenwerten zu erhalten setzten wir einfach die Eigenwerte in das Ursprungssystem ein und lösen es nach x auf.