Übersichtsblatt:
Die Determinante einer Matrix

Definition:

Gegeben sei eine Matrix $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$. Die Determinante det(A) ist definiert als:

$$\det(A) = a_1b_2c_3 + c_1a_2b_3 + b_1c_2a_3 - c_1b_2a_3 - b_1a_2c_3 - a_1c_2b_3$$

Man erhält die Determinante det(A) also indem man die Komponenten von A zunächst diagonal von oben links nach unten rechts, dann von oben rechts nach unten links miteinander multipliziert. Die Summen dieser Ergebnisse werden dann voneinander subtrahiert.

Rekursiver Ansatz:

Besonders einfach ist dies für eine (n x n) – Matrix vom Typ 2 x 2 da hierbei in jede Richtung nur eine Multiplikation erforderlich ist. Diesen Vorteil kann man sich zu nutze machen indem man die Determinante folgendermaßen berechnet:

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = +a_{11}\cdot\det\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{21}\cdot\det\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{31}\cdot\det\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

So kann man det(A) auch für jede andere Zeile oder Spalte entwickeln. Die Vorzeichen hierfür erhält man aus dem folgenden Schachbrett-Muster: $\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$

Strategischer Ansatz:

Noch besser ist es allerdings die Matrix zunächst auf obere Dreiecksgestallt umzuformen und diese dann nach der ersten Spalte zu entwickeln. Es gilt die Regel:

Die Determinante einer oberen Dreiecksmatrix ist das Produkt der Diagonalelemente:

<u>*Beispiel:*</u>

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(A) = +a_{11}\cdot\det\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{33} \end{pmatrix} - 0\cdot\det\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{33} \end{pmatrix} + 0\cdot\det\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$
$$= a_{11}\cdot(a_{22}a_{33} - 0\cdot a_{23}) = a_{11}a_{22}a_{33}$$

Auch wenn es in diesen einfachen Beispielen noch kompliziert erscheint die Matrix zunächst in die obere Dreiecksgestallt zu überführen, so stellt man für große Matrizen doch fest das es verhältnismäßig wenig arbeit macht.

Determinante der Inversen:

Die Determinante ist multiplikativ, d.h. $\det(A\cdot B) = \det(A)\cdot\det(B)$.

Daraus folgert für die Determinante der inversen Matrix:

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$