Übersichtsblatt:
Basen und Dimensionen

Definition:

Die Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_r$ eines Vektorraums V bilden genau dann eine Basis auf V wenn sie den Vektorraum V aufspannen und linear unabhängig sind.

Berechnung:

Man bildet aus den zu überprüfenden Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_r$ eine Matrix

$$A = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{21} & \cdots & v_{r1} \\ v_{12} & v_{22} & \cdots & v_{r2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{1n} & v_{2n} & \cdots & v_{rn} \end{pmatrix}$$

Die Vektoren bilden genau dann eine Basis auf ihren Vektorraum V wenn gilt $\det(A) \neq 0$.

Beispiel:

Zeigen Sie, dass die beiden Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ eine Basis des R^2 bilden:

Wir bilden nun zunächst aus den Vektoren eine Matrix, indem wir sie einfach nebeneinander in eine Klammer schreiben:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Um nun zu überprüfen ob die Vektoren eine Basis zu R^2 bilden müssen wir als nächstes die Determinante von A berechnen:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - (-2 \cdot 3) = 2 - (-6) = 2 + 6 = 8$$

Da die Determinante von A nicht 0 ist, können wir sagen, dass die Vektoren eine Basis zu R^n bilden.