Übersichtsblatt:
Produktintegration

Ausgangspunkt:

Wir wollen über eine Funktion integrieren die in der Form $f(x) = g(x) \cdot h(x)$ vorliegt. Die Schwierigkeit hierbei besteht darin, dass wir die Stammfunktion, auf Grund der Multiplikation, nicht direkt ermitteln können. Um über diese Funktion integrieren zu können, müssen wir uns der sogenannten Produktintegration (auch partielle Integration genannt) bedienen.

Vorgehensweise:

Wir benennen zunächst die Glieder des Integranden um.
Aus $f(x) = g(x) \cdot h(x)$ wird $f(x) = u(x) \cdot v'(x)$

Dann bestimmen wir die Glieder $u'(x)$ und $v(x)$ durch Ableitung bzw. Bildung der Stammfunktion.

Wenn diese glieder vorliegen haben, so kann das Integral über $f(x)$ durch nachfolgende Formel gebildet werden:

$$\int_a^b f(x) = [u(x) \cdot v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) \cdot v(x) \cdot dx$$

Beispiel:

Wir wollen das Integral über die Funktion $f(x) = x \cdot \cos(x)$ im Intervall $[0;1]$ bilden.

1. *Glieder bestimmen:*

$$u(x) = x; \; u'(x) = 1; \; v'(x) = \cos(x); \; v(x) = \sin(x)$$

2. Formel anwenden:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(x) &= [x \cdot \sin(x)]_0^1 - \int_0^1 1 \cdot \sin(x) \cdot dx \\
&= [x \cdot \sin(x)]_0^1 - \int_0^1 \sin(x) \cdot dx \\
&= [x \cdot \sin(x)]_0^1 - [-\cos(x)]_0^1 \\
&= [0 \cdot \sin(0) - 1 \cdot \sin(1)] - [-\cos(0) - (-\cos(1))] \\
&= [0 - 0{,}84] — [-1 + 0{,}54] \\
&= -0{,}84 + 0{,}46 = |-0.38| = 0{,}38
\end{aligned}$$

© Marco Rancinger
eTeachers.de Lernen leicht gemacht