

PRODUKTFORM QUADRATISCHER FUNKTIONEN

Wie bildet man die Produktform?

Gehen wir davon aus, dass eine ganzrationale Funktion 2. Grades gegeben ist. Diese hat für gewöhnlich die Form $y = f(x) = ax^2 + bx + c$. Wenn der Faktor $a \neq 1$ ist, klammern wir diesen zunächst aus. Man erhält hierdurch eine Gleichung in der Form

$$f(x) = a \cdot \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right)$$

Diese wollen wir nun in die folgende Form bringen:

$$f(x) = a \cdot (x + u) \cdot (x + v)$$

Dabei gilt der Zusammenhang:

$$\frac{b}{a} = u + v; \quad \frac{c}{a} = u \cdot v$$

Nun müssen u und v bestimmt werden, so dass dieser Zusammenhang funktioniert.

Beispiel

Die zugegebenermaßen etwas kryptische Beschreibung, will ich hier mit einem kurzen Beispiel verdeutlichen. Wir untersuchen die Funktion

$$f(x) = 3x^2 - 9x + 6$$

Da $a = 3$ und somit nicht 0 ist, klammern wir zunächst 3 aus und erhalten

$$f(x) = 3 \cdot (x^2 - 3x + 2)$$

Nun versuchen wir diese Gleichung in die Form

$$f(x) = 3 \cdot (x + u) \cdot (x + v)$$

zu bringen. Dafür untersuchen wir, wie oben beschrieben den Zusammenhang:

$$-3 = u + v; \quad 2 = u \cdot v$$

Wir suchen also ein Zahlenpaar u und v , das in Summe -3 und im Produkt 2 ergibt. Wir erkennen, dass dies zutrifft, wenn wir für $u = -2$ und für $v = -1$ einsetzen.

$$-3 = -2 + (-1); \quad 2 = -2 \cdot (-1)$$

Wir erhalten also als Produktform

$$f(x) = 3 \cdot (x - 2) \cdot (x - 1)$$

Was bringt das Ganze?

Die Produktform ermöglicht es, die Nullstellen einer quadratischen Gleichung direkt abzulesen, ohne hierfür zunächst den verhältnismäßig umständlichen Weg über die $p - q$ -Formel gehen zu müssen. Hierbei bedient man sich die Regel des sogenannten Nullprodukts, die da lautet:

„Ein Produkt ist Null, wenn mindestens ein Faktor Null ist.“

Wird eine Funktion in der Produktform dargestellt, so ist die ganze Funktion gleich Null, wenn einer der Klammerausdrücke Null wird. Da in den Klammern immer nur ein Wert auf x addiert bzw. davon subtrahiert wird, ist es sehr einfach zu erkennen, welcher Wert für x eingesetzt werden muss um den betreffenden Klammerausdruck in Summe auf 0 zu bekommen. In unserem Beispiel oben sind dies die Werte 2 und 1. Somit sind die Nullstellen auf sehr leichte Weise ermittelt.

Leider lässt sich das Zahlenpaar u und v nicht immer so leicht ermitteln wie in dem Beispiel oben. Daher ist dieses Verfahren zur Nullstellenbestimmung nur nicht für alle quadratischen Gleichungen zu empfehlen.