Übersichtsblatt:
Partielle Differentiation

Ausgangspunkt:

Wir haben eine Funktion mit mehreren unabhängigen Variablen gegeben und wollen diese nun ableiten. Hierbei stehen wir vor dem Problem, dass wir nicht ohne weiteres nach mehren Variablen gleichzeitig ableiten könne.

Die Lösung für dieses Problem ist die partielle Differentiation.

Vorgehensweise:

Gehen wir davon aus, dass die Funktion beispielsweise in folgender Form vorliegt:

$$f(x_1, x_2) = 3x_1 + 4{x_2}^2$$

Wollen wir diese Funktion nun ableiten, so müssen wir eigentlich zwei Ableitungen bilden. Die Sprechweise ist: „Wir leiten nach x_1 und nach x_2 ab.“

Wenn wir also nach x_1 ableiten, so behandeln wir auch ausschließlich x_1 als unabhängige Variable. x_2 behandeln wir wie einen Parameter (also im Grunde wie eine Ganzzahl). Ansonsten gelten die ganz normalen Ableitungsregeln.

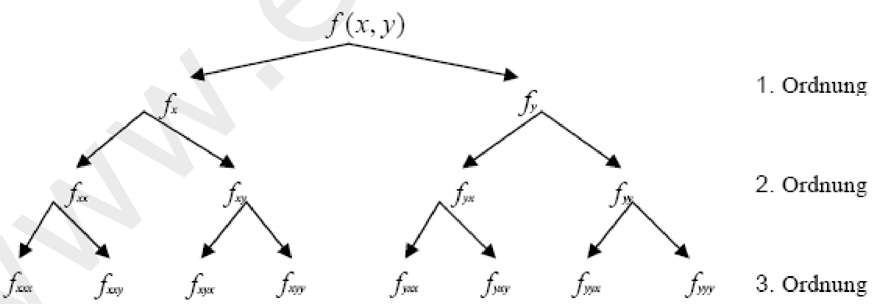
Die beiden Ableitungen für die oben genannte Beispielfunktion würden dann lauten:

$$f_{x_1} = 3$$
$$f_{x_2} = 8x_2$$

Höhere Ableitungen:

Wollen wir nun die zweite Ableitung bilden so müssen wir genauso vorgehen. Hierbei besteht die zweite Ableitung dann allerdings aus drei Funktionen. Wir leiten nämlich f_{x_1} und f_{x_1} jeweils wieder nach x1 und x2 ab. Hierbei entstehen die Funktionen: $f_{x_1x_1}$, $f_{x_1x_2}$, $f_{x_2x_1}$ und $f_{x_2x_2}$. Hier sind die Funktionen $f_{x_1x_2}$ und $f_{x_2x_1}$ allerdings identisch.

Diese Ableitungskette lässt sich recht ansehnlich in folgender Baumstruktur darstellen:



In unserem obigen Beispiel würde die zweite Ableitung, auf Grund der recht einfach gewählten Funktion, relativ unspektakulär aussehen:

$f_{x_1x_1} = 0$; $f_{x_1x_2} = f_{x_2x_1} = 0$; $f_{x_2x_2} = 8$