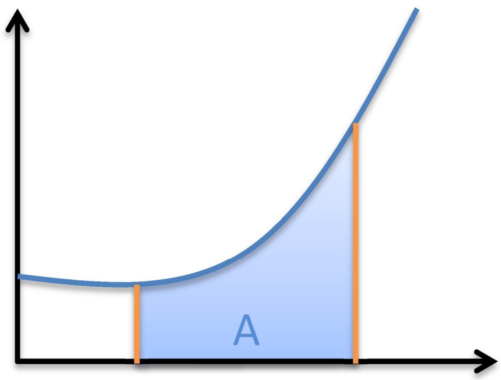
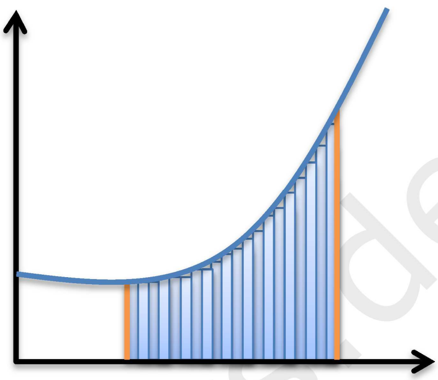
Übersichtsblatt:
Integralrechnung

Die Integralrechnung verfolgt das Ziel den Inhalt von Flächen zu bestimmen, die nicht gradlinig begrenzt sind und auch keinen bekannten geometrischen Formen entsprechen. Im konkreten Fall untersucht man Funktionsgraphen und den Flächeninhalt, den diese mit den Koordinatenachsen oder anderen Begrenzungspunkten einschließen.





Ein möglicher Lösungsansatz für dieses Problem ist eine Graphische Lösung. Man zeichnet eine bestimmte Anzahl von Rechtecken (für die sich die Fläche leicht berechnen lässt) der breite n so unter den Funktionsgraphen, dass die obere linke Ecke des Rechtecks den Graphen berührt. Nun addiert man einfach die Flächen der Rechtecke und erhält eine Näherung für den untersuchten Flächeninhalt. Je kleiner man n wählt, desto mehr Rechtecke muss man Zeichen, und desto genauer wird die Näherung.

Berechnen von Integralen

Da die zeichnerische Lösung zur Bestimmung des Flächeninhaltes zum einen sehr aufwändig und zum anderen sehr ungenau ist, empfiehlt es sich, einen rechnerischen Ansatz zu verfolgen. Statt eine Näherung über ähnliche Flächen zu erreichen, suchen wir eine Funktion, die die untersuchte Fläche exakt beschreibt.

Bestimmung der Stammfunktion

Zu diesem Zweck wird die Differentialrechnung, welche die Steigung einer gegebenen Funktion in einem beliebigen Punkt darstellt, umgekehrt um den Flächeninhalt unter der Funktion $f(x)$ zu erhalten. Wir betrachten nun unsere gegebene Funktion als Ableitung einer höheren Funktion $F(x)$. Diese höhere Funktion nennen wir die Stammfunktion.

Regel:

$$f(x) = a \cdot x^n$$
$$F(x) = \frac{a}{n+1} \cdot x^{n+1} [+C]$$

Die Konstante C, die in der Regel noch hinzugefügt wird, steht als Platzhalter für ein Absolutes Glied in der Stammfunktion, dass beim Ableiten wegfallen würde. Dieses wird hier der Vollständigkeit halber ergänzt um deutlich zu machen, dass es im Grund unendlich viele potenzielle Stammfunktionen geben kann. Für die weitere Berechnung des Integrals ist diese Konstante allerdings nicht von Belang und kann ignoriert werde.

Bestimmung des Intervalls

In der Regel ist das Intervall, in welchem die Fläche der Funktion bestimmt werden soll, vorgegeben. Teilweise muss es aber auch Berechnet werden, wenn z.B. die Intervallgrenzen durch die Schnittpunkte mit einer anderen Funktion definiert werden. In jedem Fall muss aber geprüft werden, ob die Funktion innerhalb des Intervalls Nullstellen hat. Wenn dies der Fall ist, muss das Intervall an den Nullstellen in Teilintervalle zerlegt werden.

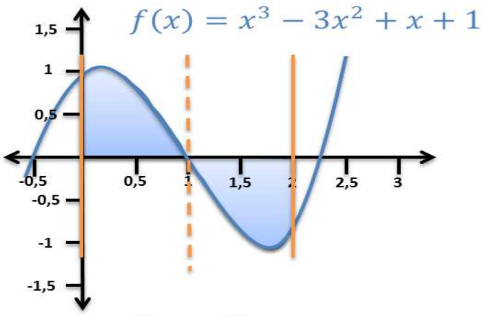
Integralrechnung

Berechnung der Fläche
Nun wir für jedes Teilintervall jeweils der Funktionswert der Stammfunktion für die obere und die untere Intervallgrenze bestimmt, wobei jeweils der Funktionswert der unteren Grenze vom Funktionswert der oberen Grenze abgezogen wird. Man erhält hierdurch Die Teilflächen in den jeweiligen Intervallen. Will man nun die gesamte Fläche berechnen, muss man die Beträge (also ohne Vorzeichen) dieser Teilflächen addieren.

Beispiel:
Um das Verfahren noch einmal zu verdeutlichen wollen wir es an Hand eines Beispiels noch einmal nachvollziehen. Wir suchen den Flächeninhalt den die Funktion

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1$$

im zwischen $x = 0$ und $x = 2$ mit der X-Achse einschließt.



Entsprechend dem oben vorgestellten verfahren bestimmen wir nun zunächst die Stammfunktion von f.

$$F(x) = \frac{1}{3+1} \cdot x^{3+1} - \frac{3}{2+1} \cdot x^{2+1} + \frac{1}{1+1} \cdot x^{1+1} + \frac{1}{0+1} \cdot x^{0+1} + C$$

$$F(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + C$$

Als nächstes bestimmen wir das Intervall. Gegeben ist, dass wir die Funktion zwischen 0 und 2 untersuchen sollen. Ein Blick auf die Skizze verrät uns allerdings, dass bei $x = 1$ ein Nullstelle vorliegt. Wir müssen also zwei Teilintervalle bilden. Eines von 0 bis zur Nullstelle 1 und ein zweites von der Nullstelle bis zum Ende des Gesamtintervalls bei 2.

Für diese beiden Teilintervalle bestimmen wir nun jeweils die Fläche, indem wir den Funktionswert der unteren Grenze vom Funktionswert der oberen Grenze abziehen.

$$\int_0^2 x^3 - 3x^2 + x + 1 = \left|\left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x\right]_0^1\right| + \left|\left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x\right]_1^2\right| =$$

$$\left|\left(\frac{1}{4}1^4 - 1^3 + \frac{1}{2}1^2 + 1\right) - \left(\frac{1}{4}0^4 - 0^3 + \frac{1}{2}0^2 + 0\right)\right| + \left|\left(\frac{1}{4}2^4 - 2^3 + \frac{1}{2}2^2 + 2\right) - \left(\frac{1}{4}1^4 - 1^3 + \frac{1}{2}1^2 + 1\right)\right| =$$

$$\left|\frac{3}{4} - 0\right| + \left|0 - \frac{3}{4}\right| = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = 1\frac{1}{2}$$