Übersichtsblatt:
Integral durch Partialbruchzerlegung

Ausgangspunkt:

Wir wollen das Integral über eine gebrochen-rationale Funktion bilden, bei der sowohl in der Zähler- als auch in der Nenner-Funktion eine ganzrationale Funktion vom Grad ≥1 steht. Die könnte beispielsweise $f(x) = \frac{x-3}{x^2-1}$ sein.

Das Problem hierbei besteht darin, dass wir, damit wir die Funktion integrieren können, eine Zähler-Funktion vom Grad 0 benötigen. Diese können wir durch Partialbruchzerlegung bekommen.

Vorgehensweise:

Zunächst muss man die Nenner-Funktion in ihre Linearfaktoren Zerlegen. Wie dies im Detail funktioniert kann im „Übersichtsblatt – Linearfaktorzerlegung " nachgelesen werden.

Für die Funktion aus unserem Beispiel oben, würde dies dann folgendermaßen aussehen.

$$f(x) = \frac{x-3}{x^2-1} = \frac{x-3}{(x-1)(x+1)}$$

Im nächsten Schritt wird dann, jeder gefundene Linearfaktor in den Nenner eines eigenen Bruches geschrieben. Im Zähler dieser Brüche steht dann jeweils ein Unbekannte.

$$\frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x+1)}$$

Diese Brüche werden dann, durch Multiplikation über Kreutz, gleichnamig gemacht und mit der Ursprungsfunktion gleichgesetzt.

$$\frac{A \cdot (x+1)}{(x-1)(x+1)} + \frac{B \cdot (x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x-3}{(x-1)(x+1)}$$

Diese Funktionen lassen sich jetzt, durch Multiplikation mit der Nenner-Funktion in ganzrationale Funktionen umwandeln.

$$A(x+1) + B(x-1) = x-3$$

In diese Funktion setzt man nun (nacheinander) die Nullstellen der ursprünglichen Nenner-Funktion ein. Dann kann man diese Gleichung jeweils nach A und B auflösen. In unserm Fall heißt das:

1. Nullstelle (x=-1) $A \cdot (-1+1) + B \cdot (-1-1) = -1-3 \Rightarrow B = -2$
2. Nullstelle (x= +1) $A \cdot (1+1) + B \cdot (1-1) = 1-3 \Rightarrow A = -1$

Danach erhalten wir als Partialbrüche also:

$$\frac{x-3}{x^2-1} = \frac{-1}{(x-1)} + \frac{-2}{(x+1)}$$

Diese können dann ganz leicht integriert werden:

$$\int \frac{x-3}{x^2-1} = \int \left(\frac{-1}{(x-1)} + \frac{-2}{(x+1)}\right) = -1 \cdot [\ln(|x-1|)] + -2 \cdot [\ln(|x+1|)]$$

Jetzt noch die obere von der unteren Grenze abziehen und Fertig.