Übersichtsblatt:

Gauß'sches Eliminationsverfahren

Beim Gauß'schen Eliminationsverfahren (oft auch Gauß-Algorithmus genannt) handelt es sich um ein Verfahren zum effizienten auflösen von linearen Gleichungssystemen mit mehr als zwei Unbekannten. Das Verfahren basiert darauf, aus den Gleichungen des Systems eine Koeffizienten-Matrix aufzustellen, und diese dann durch elementare Umformungen in eine obere Dreiecksdarstellung zu konvertieren.

Zur Verdeutlichung betrachten wir das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{ll} I.) & x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ II.) & -2x_1 + x_2 - 6x_3 = 0 \\ III.) & x_1 \qquad - 2x_3 = 3 \end{array}$$

Um dieses System aufzulösen bilden wir nun eine erweiterte Matrixdarstellung der Koeffizienten und der Ergebnismatrix (auch rechte-Seite-Matrix genannt).

$$\begin{array}{l|ccc|c} I.) & 1 & -1 & 2 & 0 \\ II.) & -2 & 1 & -6 & 0 \\ III.) & 1 & 0 & -2 & 3 \end{array}$$

Der blau hinterlegte Teil ist die Koeffizienten-Matrix. Diese kommt zu Stande, indem man jeweils nur die Koeffizient, die vor den Unbekannten stehen, mit ihren Vorzeichen aufschreibt. Die Unbekannten selbst lässt man dabei weg. Der orange hinterlegte Teil ist die Ergebnismatrix, diese besteht einfach aus den Ergebnissen, die jeweils hinter dem Gleichheitszeichen stehen (also alles auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens).

Das Ziel ist es jetzt diese erweiterte Matrix so umzuformen, dass eine sogenannte Dreiecksdarstellung resultiert. Das bedeutet, dass alle Zahlen in der Matrix, die unterhalb der Diagonalen liegen gleich Null sein sollen.

$$\begin{array}{l|ccc|c} I.) & * & * & * & * \\ II.) & 0 & * & * & * \\ III.) & 0 & 0 & * & * \end{array}$$

Dadurch erhält man nämlich in der untersten Zeile des Systems die Situation, dass genau eine Unbekannte einem Ergebnis zugeordnet ist. Das ist ein lösbares Problem, und so weiß man sicher, welchen Wert die Unbekannt hat. Diese kann man dann in die Zeile darüber einsetzten und erhält erneut eine Gleichung mit nur noch einer Unbekannten usw.

Um das System nun in diese Darstellung zu bringen, darf man grundsätzlich die folgenden Aktionen durchführen:

- Zeilen vertauschen
- Zeilen mit einer Zahl multiplizieren bzw. dividieren
- Zeilen miteinander addieren bzw. subtrahieren

Wir wollen nun das Gleichungssystem aus unserem Beispiel in diese Dreiecksdarstellung umformen. Um das zu erreichen geht man Spaltenweise von unten nach oben vor. Man versucht also zuerst in der Ersten Spalte alle erforderlichen Nullen zu bekommen, danach in der zweiten u. so Weiter. Wir müssen also zunächst in der ersten Spalte in der untersten Zeile eine Null herstellen. Hierzu ziehen wir zunächst, die Zeile I von der Zeile III ab.

$$\begin{array}{l|ccc|c|l} I.) & 1 & -1 & 2 & 0 & \\ II.) & -2 & 1 & -6 & 0 & \\ III.) & 1 & 0 & -2 & 3 & -I.) \end{array}$$

Übersichtsblatt:
Gauß'sches Eliminationsverfahren

Im Ergebnis erhalten wir ein neues Gleichungssystem, dass die von uns gewünschte Null an der richtigen Stelle aufweist. Die nächste Stelle um die wir uns kümmern müssen, ist mittlere Zeile in der ersten Spalte. Damit wir hier eine Null bekommen multiplieren wir zunächst die erste Zeile mit 2 und addieren diese dann von zur zweiten Zeile hinzu.

	$\begin{matrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & -4 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{matrix}$	$\cdot 2$
	$\begin{matrix} 2 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & -4 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{matrix}$	$+I.)$
	$\begin{matrix} 2 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -4 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{matrix}$	

Nun haben wir alle erforderlichen Nullen in der ersten Spalte hergestellt. Wir gehen also weiter in die zweite Spalte. Hier müssen wir nun in der untersten Zeile eine Null herstellen. Das erreichen wir, indem wir die zweite Zeile zur dritten Zeile Addieren.

	$\begin{matrix} 2 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -4 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{matrix}$	$+II.)$
	$\begin{matrix} 2 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -6 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{matrix}$	

Nun haben wir das System in der gewünschten Darstellung und können anfangen es aufzulösen. Hierzu konvertieren wir es nun von der Matrix-Darstellung wieder zurück in die Gleichungsform.

$$\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 0 \\ -1x_2 - 2x_3 &= 0 \\ -6x_3 &= 3 \end{aligned}$$

Jetzt können wir die Gleichungen sehr einfach lösen. Aus der untersten Gleichung ergibt sich sehr einfach, dass $x_3 = -0{,}5$ ist. Diesen Wert setzten wir dann in der zweiten Zeile für x_3 ein und erhalten den Ausdruck $-1x_2 - 2 \cdot 0{,}5 = 0$. Dieser lässt sich leicht in $x_2 = 1$ umformen. Da wir nun x_3 und x_2 kennen, können wir beides in die erste Zeile einsetzten und erhalten $2x_1 - 2 \cdot 1 + 4 \cdot 0{,}5 = 0$, was sich sehr einfach in $x_1 = 2$ umformen lässt.

Nach diesem Algorithmus/Verfahren lassen sich alle eindeutigen linearen Gleichungssysteme sehr einfach und übersichtlich lösen.