Übersichtsblatt:
Ableitungsregeln

Potenzregel
In den allermeisten Fällen wird die Ableitung einer Funktion über die sogenannte Potenzregle gebildet.

$f(x) = a \cdot x^n$	$f'(x) = n \cdot a \cdot x^{n-1}$

Beispiel:

$$f(x) = 4x^2 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 2 \cdot 4 \cdot x^{2-1} = 8x$$

Elementare Ableitungsregeln
Die Nachfolgende Tabelle beschreibt die Vorschrift zur Bildung der ersten Ableitung für eine Reihe von häufig gebrauchten Funktionen, die sich leider nicht durch die Potenzregel behandeln lassen.

Funktion $f(x)$		Ableitung $f'(x)$
Trigonometrische Funktionen	$\sin x$	$\cos x$
	$\cos x$	$-\sin x$
	$\tan x$	$\frac{1}{cos^2 x} = 1 + tan^2 x$
	$\cot x$	$-\frac{1}{sin^2 x} = -1 - cot^2 x$
Arkusfunktion	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
	$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
	$\mathrm{arccot}\, x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
Exponentialfunktionen	e^x	e^x
	a^x	$(\ln a) \cdot a^x$
Logarithmusfunktionen	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
	$log_a x$	$\frac{1}{(\ln a) \cdot x}$
Hyperbelfunktionen	$sinh\, x$	$cosh\, x$
	$cosh\, x$	$-sinh\, x$
	$tanh\, x$	$\frac{1}{cosh^2 x} = 1 - tanh^2 x$
	$\coth x$	$-\frac{1}{sinh^2 x} = 1 - coth^2 x$
Areafunktionen	$arsinh\, x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
	$arcosh\, x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
	$artanh\, x$	$\frac{1}{1-x^2}$
	$arcoth\, x$	$\frac{1}{1-x^2}$

Übersichtsblatt:
Ableitungsregeln

Faktorregel
Ein konstanter Faktor C bleibt beim Differenzieren erhalten:

$f(x) = C \cdot u(x)$	$f'(x) = C \cdot u'(x)$

Beispiel:
$f(x) = 4 \cdot \sin x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 4 \cdot \cos x$

Summenregel
Eine endliche Summe von Funktionen dar gliedweise differenziert werden:

$f(x) = \; f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)$	$f'(x) = \; f_1{}'(x) + f_2{}'(x) + \cdots + f_n{}'(x)$

Beispiel:
$f(x) = 4x^3 + 2x^2 - 6x + 5 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 12x^2 + 4x - 6$

Produktregel
Bei Faktorfunktionen gilt:

$f(x) = u(x) \cdot v(x)$	$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

Beispiel:
$f(x) = \sin x \cdot \ln x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x}$

Quotientenregel
Stehen in Zähler und Nenner einer gebrochen rationalen Funktion jeweils eine differenzierbare Funktion, so gilt:

$f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$	$f'(x) = \dfrac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$

Beispiel:
$$f(x) = \frac{4x}{3x^2+2} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{4 \cdot (3x^2+2) - 4x \cdot 6x}{(3x^2+2)^2} = \frac{12x^2 + 2 - 24x^2}{(3x^2+2)^2} = \frac{-12x^2+2}{(3x^2+2)^2}$$

Kettenregel
Die Ableitung einer aus den beiden (elementaren) Funktionen y= F(u) und u = u(x) zusammengesetzten (verketteten) Funktionen y = F(u(x)) = f(x) ist das Produkt aus der äußeren und der inneren Ableitung.

$f(x) = F(u(x))$	$f'(x) = F'(u) \cdot u'(x)$

Bezeichnungen:

$y = F(u)$:	Äußere Funktion
$u = u(x)$:	Innere Funktion
$F'(u)$:	Äußere Ableitung
$u'(x)$:	Innere Ableitung

Beispiel:
$f(x) = \ln(1+x^2) \quad \Rightarrow \quad Substitution\!: u(x) = 1 + x^2; \quad F(u) = \ln u$
Ableitungen von u und F bilden: $u(x)' = 2x; \quad F'(u) = \frac{1}{u}$

Alles in die o. g. Regel einsetzten:
$$f'(x) = \frac{1}{u} \cdot 2x = \frac{2x}{u} = \frac{2x}{1+x^2}$$