Übersichtsblatt:
Quadratische Funktionen

Definition
Quadratische Funktionen sind Funktionen zweiten Grades. Im Gegensatz zu linearen Funktionen bilden die Graphen von quadratischen Funktionen keine Geraden, sondern parabelförmige Kurven. Die höchste bzw. tiefste Stelle dieser Parabeln nennt man den Scheitelpunkt.

Allgemeine Form der quadratischen Gleichung

$$f(x) = y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

Am Faktor a lässt sich eine ganze Menge ablesen. Ist a größer als 0 (also positiv), dann ist der Graph der Funktion nach oben geöffnet, ist er kleiner als 0 (also negativ) dann öffnet sich die Parabel nach unten. Ebenfalls am Faktor a kann man erkennen, ob die Parabel eher gestreckt oder gestaucht ist. Hierzu muss man a ohne Vorzeichen betrachten. Ist $|a|$ kleiner als 1, so ist die Funktion gestaucht. Wenn $|a|$ hingegen größer ist als 1, dann sieht die Parabel gestreckt aus. Das absolute Glied c am Ende Funktion gibt, genau wie bei den linearen Gleichungen, den Schnittpunkt mit der y-Achse wieder.

Der Aufbau von quadratischen Funktionen ist ein ganzes Stück komplexer als der von linearen Funktionen. Diese Funktionen kann man nur zeichnen, wenn man zuvor eine Wertetabelle anlegt und hinreichend viele Punkte berechnet.

Bestimmen von Schnittpunkten
Will man eine Nullstelle (also den Schnittpunkt des Funktionsgraphen mit der x-Achse) oder den Schnittpunkt mit einer anderen Funktion berechnen, dann steht man bei quadratischen Funktionen vor dem Problem, diese nach x auflösen zu müssen. Dies ist im Grunde kein Problem, solange man es nur mit einer einfachen Funktion wie $y = ax^2$ zu tun hat. In diesem Fall muss man nur die Quadratwurzel ziehen und hat schon die Lösung. Liegt die Funktion aber als ganzrationale Funktion (also in der Form $y = ax^2 + bx + c$) vor, funktioniert dieser einfache Ansatz nicht mehr.

In diesem Fall können wir zur Lösungsfindung die $p - q$ –Formel einsetzten. Damit dies funktioniert, setzten wir zunächst beide Funktionen gleich und bringen dann alles auf eine Seite des Gleichheitszeichens. Dann müssen wir dafür sorgen, dass der Faktor a vor dem x^2 verschwindet. Wir Teilen also die ganze Funktion durch a und erhalten eine Funktion der Form:

$$0 = x^2 + \underbrace{\boxed{\frac{bx}{a}}}_{p} + \underbrace{\boxed{\frac{c}{a}}}_{q}$$

Die beiden hinteren Therme nennen wir p und q. Nun können wir die x-Koordinaten der Schnittpunkte (es gibt bei quadratischen Funktionen immer bis zu zwei) nach der nebenstehenden Formel berechnen.

Die Ergebnisse müssen dann wieder in eine der Ausgangsgleichungen eingesetzt werden, um die y-Koordinaten zu errechnen. Bei Nullstellen erübrigt sich dieser Schritt selbstverständlich, da die y-Koordinate hier immer 0 ist.

q-p-Formel:

$$x_{1|2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Übersichtsblatt:
Quadratische Funktionen

Bestimmung des Scheitelpunktes
Betrachtet man sich den Graphen einer quadratischen Funktion, so ist der Scheitelpunkt die interessanteste Stelle. Diese kann man natürlich nach dem Zeichnen aus dem Graphen ablesen, dies ist allerdings oft sehr ungenau. Was Berechnung des Scheitelpunktes angeht, so lässt sich dieser in den meisten Fällen ganz einfach aus der Funktionsgleichung ablesen. Die nachfolgende Tabelle gibt eine Übersicht bei welcher Darstellungsform der Funktion, man den Scheitelpunkt wie bestimmen kann:

Darstellung	**Schnittpunkt**	**Beispiel**	
$f(x) = ax^2$	$S(0\|0)$	$f(x) = 3x^2$	$S(0\|0)$
$f(x) = x^2 + d$	$S(0\|d)$	$f(x) = x^2 + 4$	$S(0\|4)$
$f(x) = (x-c)^2 + d$	$S(c\|d)$	$f(x) = (x-3)^2 + 5$	$S(3\|5)$
$f(x) = x^2$	$S(0\|0)$	$f(x) = x^2$	$S(0\|0)$
$f(x) = (x-c)^2$	$S(c\|0)$	$f(x) = (x-6)^2$	$S(6\|0)$

<u>Scheitelpunktform durch Quadratische Ergänzung</u>
Wie wir sehen ist es sehr praktisch, die Funktion in der Form $f(x) = (x-c)^2 + d$ darzustellen, da man hier den Scheitelpunkt direkt erkennen kann. Mit Hilfe der quadratischen Ergänzung kann man jede beliebige quadratische Funktion, in diese Form bringen.

Wir betrachten dieses Verfahren am Beispiel der Funktion:
$$f(x) = x^2 + 6x - 5$$

Um diese Funktion in die Scheitelpunktform zu bekommen, ignorieren wir zunächst das absolute Glied und betrachten nur den Term $x^2 + 6x$. Aus diesem Term wollen wir nun eine binomische Formel machen. Damit aus $x^2 + 6x$ das erste Binom wird $(a^2 + 2ab + b^2)$ müssen wir noch $+3^2$ ergänzen. Betrachten wir nun wieder die ganze Funktion erhalten wir:
$$f(x) = x^2 + 6x + 3^2 - 5$$

Diese Funktion könnten wir nun leicht in die gesuchte Scheitelpunktform bringen. Leider entspricht sie nicht mehr der ursprünglichen Funktion. Um diese wieder zu erhalten, korrigieren wir den schritt von gerade und ziehen die 3^2 wieder ab. Wir schreiben also:
$$f(x) = x^2 + 6x + 3^2 - 3^2 - 5$$

Da $3^2 - 3^2 = 0$ ergibt, haben wir die Ausgangsgleichung jetzt nicht mehr verändert. Sie liegt aber dennoch in einer Form vor, die wir leicht in die gesuchte Scheitelpunktform $f(x) = (x-c)^2 + d$ bringen können.

$$f(x) = x^2 + 6x + 3^2 - 3^2 - 5 \Rightarrow (x+3)^2 - 3^2 - 5$$
$$f(x) = (x+3)^2 - 14$$

In dieser Schreibweise können wir nun den Scheitelpunkt sehr leicht ablesen: $S(-3|-14)$