



Übersichtsblatt: Pumping Lemma

Das Pumping Lemma ist ein Verfahren mit dem man Beweisen kann ob eine Sprache vom Typ 3 ist, ohne dafür erst einen Automaten entwickeln zu müssen.

Die Idee:

Es Gibt für jede Reguläre Sprache L eine Natürliche Zahl n so, dass sich alle Wörter der Sprache deren Länge mindestens n beträgt in die drei Teile u, v und w zerlegen lassen. Dabei gilt zu beachten:

$$|v| \geq 1$$

$$|uv| \leq n$$

Für alle i gilt: $uv^i w \in L$

Das bedeutet für ein Wort einer regulären Sprache besteht die Möglichkeit ein Stück aus der Mitte auszuschneiden, dieses Stück immer wieder zu kopieren und den so entstandenen großen String wieder an die stelle zu schreiben an der man das Stück entnommen hat. Das Wort das nun herauskommt muss ebenfalls von L akzeptiert werden.

Anwendung:

Das Pumping Lemma wird immer wie folgt angewendet:

- Annahme: Die gegebene Sprache ist regulär (d.h. vom Typ 3).
- Es existiert ein n (= Pumpingkonstante) und es gelten die drei Aussagen des Pumping Lemma.
- Es wird der Widerspruch gezeigt, d.h. die Annahme war falsch und damit ist L nicht regulär.

Beispiel:

Die Sprache $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid w = a^m b^m, m \geq 1\}$ ist nicht regulär.

Annahme: L ist regulär, also gibt es ein n für diese Sprache so dass die Pumping-Bedingungen erfüllt sind.

Jetzt wählen wir ein Wort $x = a^n b^n$ also ein Wort der Länge 2n und überprüfen ob es uns Möglich ist das Wort x ordentlich in uvw aufzuteilen.

$|uv|$ darf maximal n Zeichen lang sein, wir wählen also $|u| = 0$, $|v| = n$ und $|w| = n$

$$\underbrace{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n}_v \underbrace{b_1, b_2, \dots, b_{n-1}, b_n}_w$$

Nun verdoppeln wir v. Wenn es sich um eine reguläre Sprache handelt, so müsste das resultierende Word laut Pumping Lemma, von L akzeptiert werden.

$$a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n, b_1, b_2, \dots, b_{n-1}, b_n$$

Wir haben nun v verdoppelt und festgestellt, dass das neue Wort doppelt so viele a's hat wie b's. Dies ist ein Widerspruch zur Definition der Sprache L. Das neue Wort wird also nicht von L akzeptiert. Somit ist bewiesen, dass unsere Annahme, L ist eine reguläre Sprache, falsch war. L ist nicht vom Typ drei.

Merke:

Das Pumping Lemma dient nur als Widerspruchsbeweis. D. h. man kann nur beweisen, dass eine gegebene Sprache nicht vom Typ 3 ist. In umgekehrter Richtung funktioniert dieser Beweis nicht!!!