Übersichtsblatt:
Boole'sche Algebra

Theoreme:

Null- und Eins-Theorem:

$X \vee 0 = X \qquad X \wedge 0 = 0$

$X \vee 1 = 1 \qquad X \wedge 1 = X$

Idempotenz:

$X \vee X = X \qquad X \wedge X = X$

Komplement:

$X \vee \overline{X} = 1 \qquad X \wedge \overline{X} = 0$

Boole'sche Funktionen:

Mit einem Eingang und einem Ausgang:

- Konstante 1
- Konstante 0
- Identität
- NOT

Mit zwei Eingängen und einem Ausgang:

- Konstante 1
- Konstante 0
- NOR
- Inhibition
- XOR
- NAND
- AND
- XNOR
- OR

Rechenregeln der Boole'schen Algebra:

Kommutativgesetzt:

$X_1 \wedge X_2 = X_2 \wedge X_1$

$X_1 \vee X_2 = X_2 \vee X_1$

Assoziativgesetz:

$(X_1 \wedge X_2) \wedge X_3 = X_1 \wedge (X_2 \wedge X_3) = X_1 \wedge X_2 \wedge X_3$

$(X_1 \vee X_2) \vee X_3 = X_1 \vee (X_2 \vee X_3) = X_1 \vee X_2 \vee X_3$

Kürzungsregeln:

1. $X_1 \vee (X_1 \wedge X_2) = X_1$
2. $X_1 \wedge (X_1 \vee X_2) = X_1$
3. $X_1 \vee (\overline{X}_1 \wedge X_2) = X_1 \vee X_2$
4. $X_1 \wedge (\overline{X}_1 \vee X_2) = X_1 \wedge X_2$
5. $(X_1 \wedge X_2) \vee (X_1 \wedge \overline{X}_2) = X_1$
6. $(X_1 \vee X_2) \wedge (X_1 \vee \overline{X}_1) = X_1$

De Morgan'sche Gesetze:

1. $\overline{X_1 \wedge X_2} = \overline{X_1} \vee \overline{X_2}$
2. $\overline{X_1 \vee X_2} = \overline{X_1} \wedge \overline{X_2}$

Übersichtsblatt:
Boole’sche Algebra

Normalformen:

Normalformen Boole’scher Funktionen beschreiben beliebige Funktionen in einheitlicher Form. In der Boole’schen Algebra sind zwei Normalformen gebräuchlich, die disjunktive Normalform und die konjunktive Normalform (DNF und KNF). Diese Normalformen basieren auf Mintermen und Maxtermen.

Beide Formen führen bei vorgegebener Boole’schen Funktion zu einer Realisierung mittel einer zweistufigen Schaltung.

Disjunktive Normalform (DNF):

Minterme:

Definition:

Bei Boole’schen Funktionen mit n Eingangsvariablen bezeichnet man die konjunktive Verknüpfung (AND) aller Variablen als Minterm. Die Eingangsvariablen können dabei mit oder ohne Negierung in die konjunktive Verknüpfung einbezogen werden.

Ein Minterm ist somit eine Boole’sche Funktion, die (entsprechen der AND-Verknüpfung) für genau eine Eingangskombination den Ausgangswert 1 und für alle anderen Kombinationen den Wert 0 annimmt.

DNF-Beschreibung Boole’scher Funktionen:

Um eine Funktion in die disjunktive Normalform zu bringen betrachtet man sich die Wahrheitstabelle der Funktion und verknüpft disjunktiv (d.h. OR) alle die Kombinationen von Eingangsvariablen, welche als Ergebnis eine 1 liefern.

Beispiel:

X_3	X_2	X_1	Y	Term
0	0	0	0	$\overline{X_1} \wedge \overline{X_2} \wedge \overline{X_3}$
0	0	1	1 ← verwenden	$\overline{X_1} \wedge \overline{X_2} \wedge X_3$
0	1	0	0	$\overline{X_1} \wedge X_2 \wedge \overline{X_3}$
0	1	1	1 ← verwenden	$\overline{X_1} \wedge X_2 \wedge X_3$
1	0	0	1 ← verwenden	$X_1 \wedge \overline{X_2} \wedge \overline{X_3}$
1	0	1	0	$X_1 \wedge \overline{X_2} \wedge X_3$
1	1	0	1 ← verwenden	$X_1 \wedge X_2 \wedge \overline{X_3}$
1	1	1	1 ← verwenden	$X_1 \wedge X_2 \wedge X_3$

Hier lautet die disjunktive Normalform also:

$(\overline{X_1} \wedge \overline{X_2} \wedge X_3) \vee (\overline{X_1} \wedge X_2 \wedge X_3) \vee (X_1 \wedge \overline{X_2} \wedge \overline{X_3}) \vee (X_1 \wedge X_2 \wedge \overline{X_3}) \vee$
$(X_1 \wedge X_2 \wedge X_3)$

Übersichtsblatt:
Boole'sche Algebra

Konjunktive Normalform:

Maxterme:

Definition:

Ein Maxterm ist die disjunktive Verknüpfung aller Eingänge in negierter oder nicht- negierter Form. Bei n Eingangvariablen gibt es 2^n unterschiedliche Maxterme.

Ein Maxterm ist somit eine Boole'sche Funktion, die (entsprechen der OR-Verknüpfung) für genau eine Eingangskombination den Ausgangswert 0 und für alle anderen Kombinationen den Wert 1 annimmt.

KNF-Beschreibung Boole'scher Funktionen:

Um eine Funktion in die konjunktive Normalform zu bringen, betrachtet man sich ihre Wahrheitstabelle und verknüpft konjunktiv (d.h. AND) alle Eingangskombinationen, die das Ergebnis 0 liefern.

Beispiel:

X_3	X_2	X_1	Y	Term
0	0	0	0 ← verwenden	$\overline{X_1} \wedge \overline{X_2} \wedge \overline{X_3}$
0	0	1	1	$\overline{X_1} \wedge \overline{X_2} \wedge X_3$
0	1	0	0 ← verwenden	$\overline{X_1} \wedge X_2 \wedge \overline{X_3}$
0	1	1	1	$\overline{X_1} \wedge X_2 \wedge X_3$
1	0	0	1	$X_1 \wedge \overline{X_2} \wedge \overline{X_3}$
1	0	1	0 ← verwenden	$X_1 \wedge \overline{X_2} \wedge X_3$
1	1	0	1	$X_1 \wedge X_2 \wedge \overline{X_3}$
1	1	1	1	$X_1 \wedge X_2 \wedge X_3$

Hier lautet die disjunktive Normalform also:

$(\overline{X_1} \wedge \overline{X_2} \wedge \overline{X_3}) \wedge (\overline{X_1} \wedge X_2 \wedge \overline{X_3}) \wedge (X_1 \wedge \overline{X_2} \wedge X_3)$

Minimieren Boole'scher Funktionen:

Die oben vorgestellten Normalformen sind bei n Eingangsvariablen in der ersten Schaltungsstufe mit Gattern der Breite n aufgebaut. Dies führt zu einem unnötig hohen Schaltungsaufwand.

Es werden daher zweistufige Formen gesucht, die einen minimale Komplexität aufweisen. Dabei erhält man zwei Minimalformen: die konjunktive und die disjunktive Minimalform (KMF und KDF).

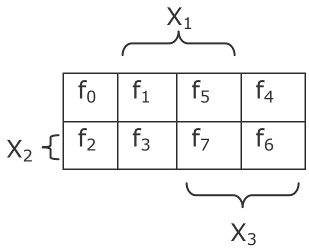
Die Komplexität von KMF und KDF kann durchaus unterschiedlich sein. Um eine Beschreibung mit minimaler Komplexität zu erhalten, müssen beide Lösungen ermittelt und die Lösung mit der geringsten Komplexität ausgewählt werden.

Übersichtsblatt:
Boole'sche Algebra

Minimierungsverfahren:

KV-Diagramm:

Ein KV-Diagramm ist eine zweidimensionale Darstellungsform der Wahrheitstabelle. Zur Erstellung eines KV-Diagramms mit n Eingangsvariablen benötigt man zunächst 2^n Felder. Und beschriftet diese so, dass je die Hälfte der Felder einer bestimmte Eingangsvariable zugeordnet sind. Dann trägt man die Funktionsergebnisse so in die Felder ein, dass ein Ergebnis immer an der Stelle steht, an der die entsprechende Kombination von Eingangsvariablen realisiert ist. Zur Verdeutlichung folgende Graphik:



X_3	X_2	X_1	Y
0	0	0	f_0
0	0	1	f_1
0	1	0	f_2
0	1	1	f_3
1	0	0	f_4
1	0	1	f_5
1	1	0	f_6
1	1	1	f_7

Implikanten:

Man unterscheidet drei verschiedene Sorten von Implikanten:

Implikanten:

Ein Implikant fasst Min- bzw. Maxterme einer Funktion so zusammen, dass deren Verbund durch einen Term geringerer Komplexität beschrieben werden kann. Die Anzahl der in einem Implikanten zusammengefassten Min- bzw. Maxterme bildet eine 2er-Potenz.

Priemimplikanten:

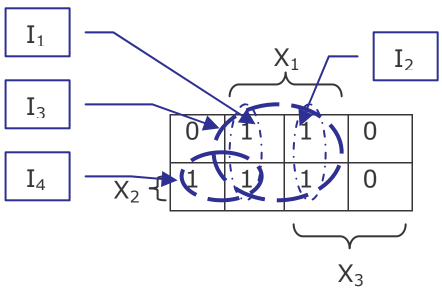
Ist ein Implikant einer Boole'schen Funktion in keinem anderen Implikanten vollständig enthalten, wird er als Priemimplikant bezeichnet.

Kern-Priemimplikanten:

Enthält ein Priemimplikant mindestens einen Min oder Maxterm, der in keinem anderen Priemimplikanten enthalten ist, bezeichnet man diesen als Kern-Priemimplikanten.

Implikanten im KV-Diagramm:

Im KV-Diagramm kann man Implikanten ganz einfach erkennen. Ein Implikant ist hier immer eine Zusammenfassung von Feldern mit dem gleichen Wert, die genau nebeneinander liegen:



I_1 und I_2 sind vollständig in I_3 enthalten und somit einfache Implikanten. I_3 und I_4 sind Kern-Priemimplikanten, denn jeder enthält einen Minterm der sonst in keinem andren Priemimplikanten enthalten ist. Zur Beschreibung der Funktion sind also nur Implikanten I_3 und I_4 notwendig.

Übersichtsblatt:
Boole'sche Algebra

Die disjunktive Minimalform:

Die disjunktive Minimalform einer Boole'schen Funktion kann wie folgt bestimmt werden:

1. Ermittlung der Priemimplikanten durch Zusammenfassen von Mintermen anhand der Rechenregeln der Boole'schen Algebra oder anschaulich im KV-Diagramm. Ergebnis ist eine Menge von Priemimplikanten.
2. Ermittlung der Kern-Priemimplikanten.
3. Alle Kern-Priemimplikanten in die Minimalform einbeziehen, da sie einen exklusiven Minterm besitzen. Von den verbleibenden Priemimplikanten einen minimale Anzahl in die Minimalform einbeziehen, sodass jeder Minterm in zumindest einem Priemimplikanten enthalten ist.
4. Zur Bildung der Minimalform werden die ausgewählten Priemimplikanten disjunktiv zusammengesetzt.

Die konjunktive Minimalform:

Die konjunktive Minimalform wird mit dem gleichen Vorgehen ermittelt, es werden allerdings die Priemimplikanten für die Maxterme ermittelt und konjunktiv verknüpft.

Ausnutzung von Redundanzen:

Sind nur für eine eingeschränkte Anzahl von Eingangskombinationen zugehörige Funktionswerte spezifiziert, darf eine Boole'sche Funktion bei den anderen Eingangskombinationen beliebe Werte liefern. Solche redundanten Werte lassen sich beim Minimieren ausnutzen, da man je nach Eignung den Wert als 0 oder 1 wählen kann.
Redundante Funktionswert werden mit dem Wert „egal" (don't care) bezeichnet und sollen hier mit einem ‚d' bezeichnet werden.

Beispiel:

Bildung der konjunktiven Minimalform:

		X_1	X_1	
	d	0	d	1
X_2	1	d	0	0
			X_3	X_3

Damit erhält man die konjunktive Minimalform:

$$Y = I_2 \wedge I_1 = \left(\overline{X_2} \wedge \overline{X_3}\right) \wedge \overline{X_1}$$